

Θεωρία Αριθμών

Τετάρτη 31-1-2018

1. (1 μονάδα) Βρείτε όλα τα $a \in \mathbb{Z}$ για τα οποία

$$(3a + 2, 7a + 1) = 11.$$

2. (1 μονάδα) Αποδείξτε ότι ο 101 είναι πρώτος. Μετά βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $97!$ με το 101.

3. (1 μονάδα) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του 17^{290} με το 65.

4. (2 μονάδες) Αποδείξτε ότι ο 41 είναι πρώτος. Δίνεται ότι το 6 είναι αρχική ρίζα mod 41.

(α) Βρείτε όλους τους φυσικούς x ώστε $x \leq 70$ και $\text{ord}_{41}(6^x) = 20$.

(β) Βρείτε όλους τους φυσικούς y ώστε $6^{5y} \equiv 1 \pmod{41}$.

5. (1 μονάδα) Έστω n φυσικός. Δείξτε ότι

$$\phi(n^{2018}) = n^{2017} \phi(n).$$

6. (1 μονάδα) Έστω a, b φυσικοί. Δείξτε ότι αν $(a, b) = 1$ τότε

$$(a - b, a^{2017} b^{2018}) = 1.$$

7. (1 μονάδα) Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της Διοφαντικής εξίσωσης

$$48x - 87y = 111,$$

ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις.

8. (2 μονάδες) Βρείτε τον μικρότερο φυσικό μεγαλύτερο του 4000 που είναι λύση του συστήματος γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x \equiv -3 \pmod{11} \\ -2x \equiv 7 \pmod{23} \\ 6x \equiv 15 \pmod{45} \end{cases}$$

Καλή επιτυχία.